

《虚数単位と複素数》

1 複素数

1. 虚数単位

2乗すると -1 になる新しい数を考える。これを虚数単位といい、文字 i で表す。つまり、 $i^2 = -1$ である。また、 $-1 \times i = -i$ とする。

2. 複素数

虚数単位 i と実数 a, b を用いて $a + bi$ で表される数を複素数という。このとき、 a を実部、 b を虚部という。

$b = 0$ のときは実数である。 $b \neq 0$ のとき、複素数 $a + bi$ を虚数という。特に、 $a = 0, b \neq 0$ のとき、 $a + bi = bi$ となり、これを純虚数という。

[注意] 虚数において、正負や大小は考えない。

例題 1 次の複素数の実部と虚部を示せ。

(1) $1 + 5i$ (2) $\sqrt{3}i$ (3) -4

解答 (1) 実部 1, 虚部 5 (2) 実部 0, 虚部 $\sqrt{3}$ (3) 実部 -4 , 虚部 0

2 複素数の相等

a, b, c, d を実数、 i を虚数単位とする。2つの複素数が等しいということを、次のように定義する。

$$a + bi = c + di \iff a = c, b = d$$

$$\text{とくに, } a + bi = 0 \iff a = 0, b = 0$$

つまり、2つの複素数が等しいのは、実部と虚部がともに等しいときである。

例題 2 次の等式を満たす実数 x, y を求めよ。

(1) $x + yi = 3 + 2i$ (2) $(x + 2y) + (x - 8)i = 0$

解答 (1) x, y は実数だから、 $x = 3, y = 2$
 (2) $x + 2y, x - 8$ は実数であるから、 $x + 2y = 0, x - 8 = 0$
 これを解いて、 $x = 8, y = -4$

3 共役な複素数

$a + bi$ に対し、 $a - bi$ を共役な複素数という。同様に、 $a - bi$ と共役な複素数は $a + bi$ である。これら2つの複素数は、互いに共役であると言う。※複素数 α と共役な複素数は、 $\bar{\alpha}$ と表すことがある。

4 複素数の加法・減法

複素数は、次の2点に注意すれば、文字式と同様に計算できる。

- ① i を文字と同じように扱う。
- ② i^2 は -1 でおき換える。

複素数の加法・減法は次のようになる。

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

つまり、実部は実部どうし、虚部は虚部どうしで計算すればよい。

例題 3 次の計算をせよ。

(1) $(2 + 3i) + (1 - 5i)$ (2) $(4 + i) - (3 + 2i)$

解答

(1) $(2 + 3i) + (1 - 5i) = (2 + 1) + (3 - 5)i = 3 - 2i$
 (2) $(4 + i) - (3 + 2i) = (4 - 3) + (1 - 2)i = 1 - i$

【確かめよう】

[/ 11]

1 次の複素数の実部と虚部を示せ。

- (1) $3 + i$
 (2) $-i$
 (3) 4

1

(1)	
(2)	
(3)	

2 次の等式を満たす実数 x, y を求めよ。

- (1) $x + yi = 2 - i$
 (2) $(x + 4) + (3x - y)i = 0$
 (3) $(2x + 3y) + (3y - 1)i = 0$
 (4) $(2i + 3)x + (2 - 3i)y = 5 - i$

2

(1)	
(2)	
(3)	
(4)	

3 次の計算をせよ。

- (1) $(2 + i) + (4 + 5i)$
 (2) $(5 + 3i) + (6 - 8i)$
 (3) $(3 - 5i) - (2 - 7i)$
 (4) $(5 + 3i) - (5 - 3i)$

3

(1)	
(2)	
(3)	
(4)	